

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 4

## Calcul variationnel



## 4.1 Equation d'Euler-Lagrange

## 4.2 Constante du mouvement de Beltrami

## 4.3 Brachistochrone

- **Action** : fonctionnelle de la coordonnée généralisée  $q$   
intégrale temporelle du lagrangien où  $t \in [t_i, t_f]$

$$(4.1)$$

- **Variation de l'action** :

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (4.3)$$

- **Variation du lagrangien** : (4.4)

$$\delta L(q(t), \dot{q}(t)) = L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

- **Variations** : coordonnée et vitesse généralisées

$$\delta q(t) = \eta(t) d\varepsilon \quad \text{et} \quad \delta \dot{q}(t) = \dot{\eta}(t) d\varepsilon \quad (4.6)$$

- **Conditions au bord** :  $q(t_i), q(t_f), \dot{q}(t_i), \dot{q}(t_f)$  fixés

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \delta \dot{q}(t_i) = \delta \dot{q}(t_f) = 0 \quad (4.7)$$

$$\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\eta}(t_i) = \dot{\eta}(t_f) = 0 \quad (4.8)$$

- **Variation de l'action :** (4.5)

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L \left( q(t), \dot{q}(t) \right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt$$

- **Variations :** coordonnée et vitesse généralisées

$$\delta q = \frac{\delta q}{d\varepsilon} d\varepsilon = \eta d\varepsilon \quad \text{et} \quad \delta \dot{q} = \frac{\delta \dot{q}}{d\varepsilon} d\varepsilon = \dot{\eta} d\varepsilon \quad (4.6)$$

- **Variation de l'action :** composition de fonctions du paramètre  $\varepsilon$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\delta q}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\delta \dot{q}}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon dt = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt \quad (4.9)$$

- **Intégration par parties :**

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt \quad (4.10)$$

- **Identité :** condition au bord (4.8)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta \Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t_f) \eta (t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t_i) \eta (t_i) = 0 \quad (4.11)$$

- **Intégration par parties** : (4.11) dans (4.10)

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt \quad (4.12)$$

- **Variation de l'action** : (4.12) dans (4.9)

$$\delta S = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \eta dt \quad (4.13)$$

- **Minimum de l'action** : variation nulle pour tout  $\delta q = \eta d\varepsilon$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0 \quad (4.14)$$

- **Equation d'Euler-Lagrange** :

$$(4.15)$$

- **Hamiltonien** : opposé de la transformation de Legendre du lagrangien

$$(4.14)$$

- **Conjugaison** : lagrangien et hamiltonien

$$p(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad \dot{q}(p, \dot{p}, t) = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p} \quad (4.17)$$

- **Dérivée temporelle de l'hamiltonien** :

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.18)$$

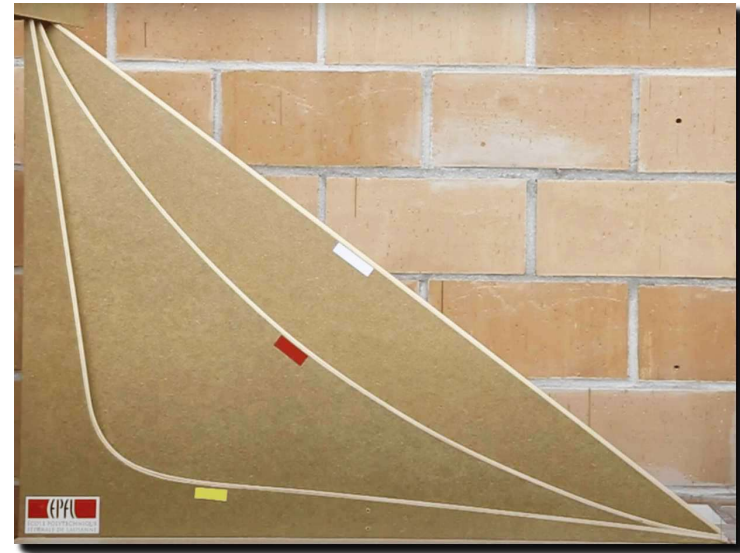
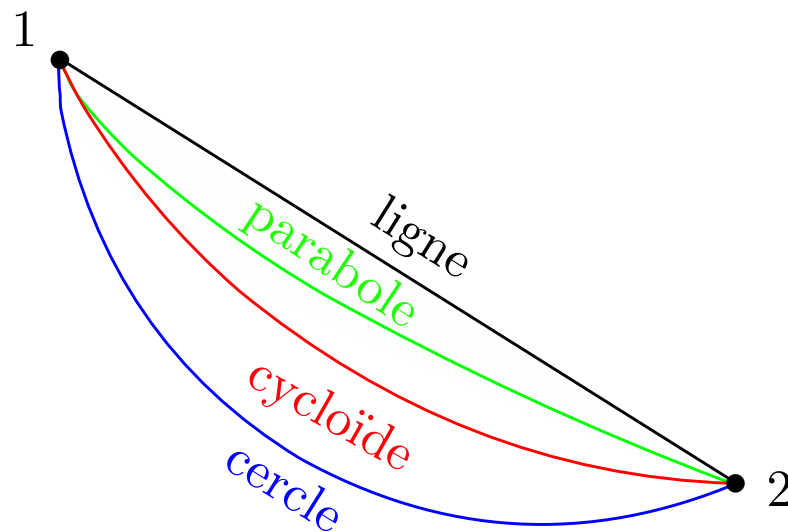
- **Symétrie** : lagrangien invariant par evolution temporelle  $t$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

- **Hamiltonien** : constante de Beltrami : conservation de l'énergie

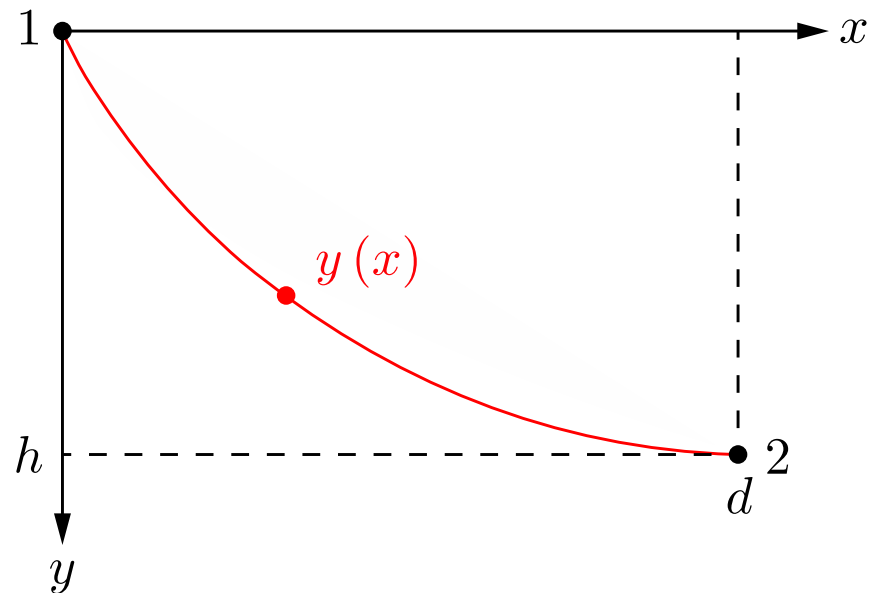
$$(4.20)$$

- **Brachistochrone** : courbe dans un plan vertical qui minimise le temps de parcours d'un point matériel entre des deux points notés 1 et 2.
- **Etymologie** : (grec) 'brachistos' = plus court; 'chronos' = temps



- **Calcul variationnel** : minimisation de la fonctionnelle temps de parcours  $T[y]$  où  $y(x)$  dans le plan vertical  $Oxy$ .

$$T[y] = T\left(y(x), y'(x)\right) \quad \text{où} \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} \quad (4.31)$$



- **Vitesse scalaire** : dérivée temporelle de l'abscisse curviligne

$$v(y(x)) = \frac{ds(y(x))}{dt} \quad (4.32)$$

- **Temps de parcours** :  $y(0) = h$  et  $y(d) = 0$

$$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{y(0)}^{y(d)} \frac{ds(y(x))}{v(y(x))} \quad (4.33)$$

- **Abscisse curviligne** : infinitésimal

$$ds(y(x)) = \sqrt{dx^2 + dy^2(x)} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (4.34)$$

- **Conservation de l'énergie mécanique** :  $y(0) = 0$  et  $v(y(0)) = 0$

$$E = \frac{1}{2} m v^2(y(x)) + mgy(x) = 0 \quad (4.35)$$

- **Vitesse scalaire** :

$$v(y(x)) = \sqrt{2gy(x)} > 0 \quad (4.36)$$

- **Temps de parcours** :

$$T[y] = \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx \quad (4.37)$$

- **Action** :

$$S[y] = mc^2 T[y] = mc^2 \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx \quad (4.38)$$

- **Action** : intégrale temporelle du lagrangien :  $dx = c dt$

$$S[y] = \int_0^d L(y(x), y'(x)) dt(x) = \int_0^d L(y(x), y'(x)) \frac{dx}{c} \quad (4.41)$$

- **Lagrangien** :

$$L(y(x), y'(x)) = mc^3 \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} \quad (4.42)$$

- **Changement de variables** : mécanique analytique  $\rightarrow$  brachistochrone

$$t \rightarrow x \quad \text{et} \quad q(t) \rightarrow y(x) \quad \text{et} \quad \dot{q}(t) \rightarrow y'(x) \quad (4.43)$$

- **Variation de l'action** : variation nulle pour tout  $\delta y$  (4.14)

$$\delta S = \int_0^d \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right) \delta y \frac{dx}{c} = 0 \quad (4.44)$$

- **Equation d'Euler-Lagrange** :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'(x)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y(x)} = 0 \quad (4.45)$$

- **Symmétrie du lagrangien** :  $L$  ne dépend pas explicitement de  $x$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.46)$$

- **Constante de Beltrami du mouvement** : où  $K \neq H$

$$K = \frac{\partial L}{\partial y'(x)} y'(x) - L = \text{cste} \quad (4.47)$$

- **Dérivée partielle du lagrangien** :

$$\frac{\partial L}{\partial y'(x)} = \frac{mc^3 y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'^2(x))}} = \frac{y'(x)}{1+y'^2(x)} L \quad (4.48)$$

- **Constante de Beltrami** :

$$K = \left( \frac{y'^2(x)}{1+y'^2(x)} - 1 \right) L = - \frac{L}{1+y'^2(x)} = \text{cste} \quad (4.49)$$

- **Constante de Beltrami :**

$$K = - \frac{mc^3}{\sqrt{2gy(x)(1+y'^2(x))}} \equiv - \frac{mc^3}{\sqrt{4gR}} = \text{cste} \quad (4.50)$$

- **Constante géométrique :**

$$y(x) \left(1 + y'^2(x)\right) = 2R = \text{cste} \quad (4.51)$$

- **Pente de la trajectoire :** positive orientée vers le bas

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = - \sqrt{\frac{2R - y(x)}{y(x)}} \quad (4.52)$$

- **Relation différentielle :**

$$dx = - \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy \quad (4.53)$$

- **Changement de variable :**

$$y = R(1 - \cos \theta) \quad \text{ainsi} \quad dy = R \sin \theta d\theta \quad (4.55)$$

- **Relation différentielle** : (4.55) dans (4.53) donne (4.56)

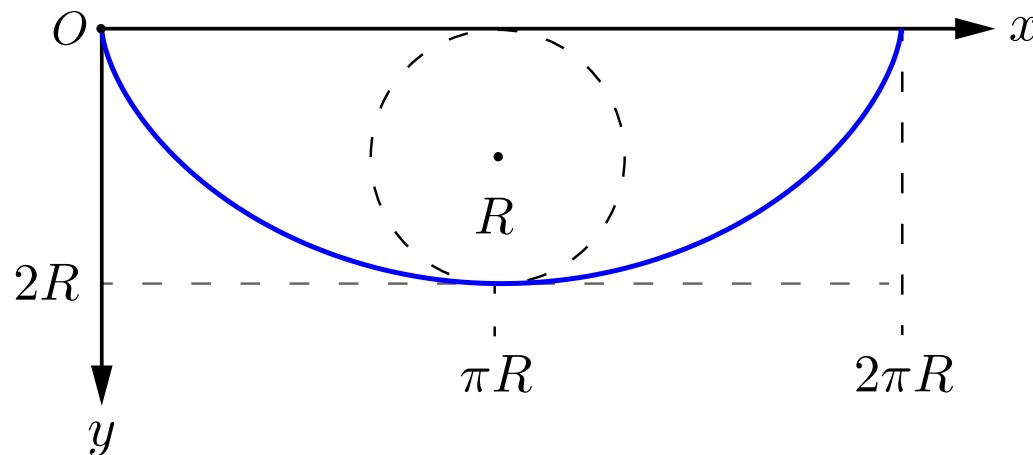
$$dx = R \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \sin \theta d\theta = \frac{R(1 - \cos \theta)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta = R(1 - \cos \theta) d\theta$$

- **Coordonnée d'abscisse** :

$$x = \int_0^x dx' = R \int_0^\theta (1 - \cos \theta') d\theta' = R(\theta - \sin \theta) \quad (4.57)$$

- **Cycloïde inversée** : abscisse et ordonnée

$$x = R(\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y = R(1 - \cos \theta) \quad (4.55) \quad \text{et} \quad (4.57)$$



- **Condition finale** :  $\theta = \theta_2$  :  $x = d$  et  $y = 0$

$$d = R(\theta_2 - \sin \theta_2) \quad \text{et} \quad h = R(1 - \cos \theta_2) \quad (4.58)$$

- **Optimisation de l'angle final** : rapport hauteur sur rayon

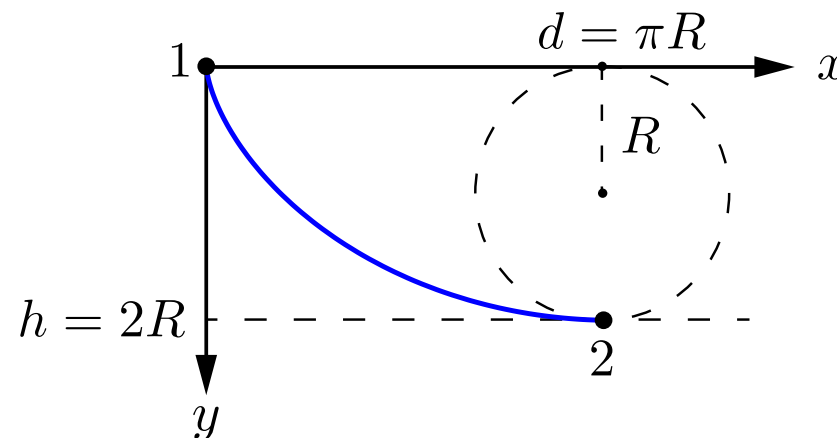
$$\left. \frac{d\left(\frac{h}{R}(\theta'_2)\right)}{d\theta'_2} \right|_{\theta_2} = \left. \frac{d(1 - \cos \theta'_2)}{d\theta'_2} \right|_{\theta_2} = \sin \theta_2 = 0 \quad (4.59)$$

- **Demi-période** : cycloïde (angle final)

$$\theta_2 = \pi \quad (4.60)$$

- **Rayon et distance** : (4.60) dans (4.58)

$$(4.61)$$

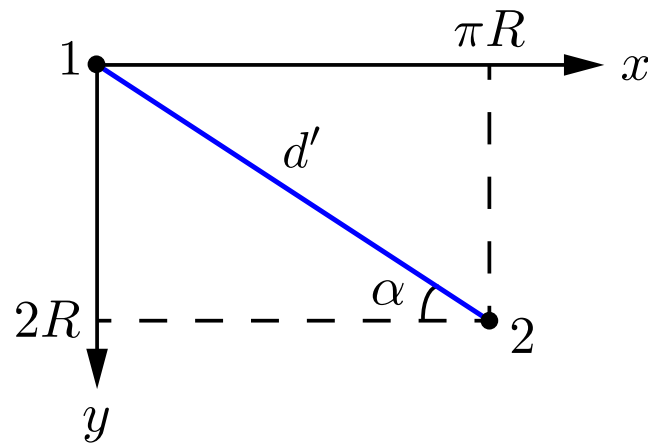


- Temps de parcours minimal : (4.37), (4.51) et (4.54)

$$\begin{aligned} T[y] &= \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx = \int_0^d \sqrt{\frac{2R}{2gy^2(x)}} dx \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2R}{2gR^2(1 - \cos\theta)^2}} R(1 - \cos\theta) d\theta \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\pi d\theta = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned}$$

- Temps de parcours minimal : cycloïde

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \tag{4.62}$$



- **Distance parcourue en ligne droite** : cinématique (plan incliné)

$$d' = \frac{1}{2} g \sin \alpha T'^2 = \frac{1}{2} g \frac{2R}{d'} T'^2 \quad (4.63)$$

- **Distance parcourue en ligne** : géométrie (plan incliné)

$$d' = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = \pi R \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \quad (4.64)$$

- **Temps de parcours en ligne** : comparaison cycloïde

$$(4.65)$$